Comparación entre diversas medidas de desigualdad: Su aplicación a la encuesta de diferencias relativas de renta de 1972

por EZEQUIEL URIEL JIMENEZ

Estadístico Facultativo

0. INTRODUCCION

En el primer trimestre de 1972 el INE realizó en España una encuesta sobre diferencias relativas de renta. Esta encuesta forma parte de un proyecto internacional sobre comparación de rentas elaborado por la Conferencia de Estadísticos Europeos, al que se adhirió nuestro país conjuntamente con otros siete países.

En el presente estudio nos proponemos utilizar los resultados obtenidos de dicha encuesta en España para comparar distintas medidas de desigualdad de renta. El esquema de nuestra exposición será el siguiente. En el epígrafe 1, resumiremos las características y los conceptos de esta encuesta basándonos en la monografía publicada por el INE (1974) y en varios documentos de la Conferencia de Estadísticos Europeos. En el epígrafe 2 examinaremos seis medidas de desigualdad de la renta que utilizaremos en nuestro estudio. Finalmente, en el epígrafe 3 aplicaremos estas medidas y analizaremos los resultados obtenidos.

1. CARACTERISTICAS FUNDAMENTALES DE LA ENCUESTA DE DIFERENCIAS RELATIVAS DE RENTA

En España el tamaño de la muestra para esta encuesta se fijó en 10.000 viviendas. El colectivo investigado, a diferencia de otros países en que comprendía toda la población, se limitó a aquellos hogares cuyos cabezas fueran asalariados o inactivos. Las rentas se refieren al año 1971.

Se considera como perceptor de renta a toda persona que durante el período investigado haya recibido cualquier tipo de renta, incluyendo a trabajadores familiares, estudiantes que trabajen estacionalmente, etc. Por otra parte, se considera *perceptor activo* a toda persona que durante el período investigado haya percibido rentas como retribución a su actividad. Dentro de los perceptores activos se distingue entre los *regulares* —aquellos que llevan a cabo una actividad productiva remunerada durante siete o más meses del año cubierto por la encuesta— y los *eventuales*. Entre estos últimos siempre están incluidos los trabajadores familiares. En la explotación de los datos se han considerado tres unidades de referencia: hogar, persona y perceptor activo.

En esta encuesta los tipos de renta que se han manejado han sido los siguientes: renta primaria, renta distribuida de los factores y renta disponible.

a) La *renta primaria* está integrada por el conjunto de retribuciones brutas al factor trabajo y por el conjunto de rentas de los empresarios individuales. Estas últimas entran a formar parte de la encuesta sólo en el caso de que el cabeza de familia sea asalariado, jubilado, retirado o rentista.

b) La *renta distribuida* de los factores es la suma de la renta primaria y de las rentas derivadas de la propiedad.

c) La *renta disponible* se obtiene añadiendo a la renta distribuida de los factores las transferencias corrientes percibidas y deduciendo las transferencias corrientes pagadas.

Las características de clasificación que serán tenidas en cuenta en el estudio comparativo de las medidas de desigualdad son las siguientes: categoría socioeconómica del cabeza de familia, edad del cabeza de familia, número de perceptores activos del hogar, tamaño del hogar, tamaño del municipio, nivel de instrucción de los perceptores activos, edad de los perceptores activos y categoría socioeconómica.

2. MEDIDAS DE DESIGUALDAD DE LA RENTA

A partir de los datos publicados de distribución por decilas de la encuesta de diferencias relativas de renta, vamos a realizar un estudio comparativo entre diferentes medidas de desigualdad. Concretamente hemos seleccionado las siguientes medidas de desigualdad: *a)* el coeficiente de concentración de Gini (*IG*); *b)* el porcentaje para máxima igualdad (*E*); *c)* la medida v de Frigyes (*MVF*); *d)* la varianza de los logaritmos de la renta (*VLR*); *e)* la medida de desigualdad basada en la teoría de la información ponderando con participación en la renta (*IYX*); *f)* la medida de desigualdad basada en la teoría de la información ponderando con participación en la población (*IXY*). Las tres últimas medidas consideradas tienen la ventaja de que permiten tratar diversos niveles de agregación. A continuación pasamos a describir cada una de estas medidas, señalando la forma en que se han aplicado a las distribuciones por decilas.

2.1 Indice de concentración de Gini

El índice de concentración de Gini es sin duda la más popular de las medidas de desigualdad. Está estrechamente conectada con la curva de Lorenz.

En una distribución de frecuencias, ordenada de menor a mayor participación en renta, designaremos por y_i y por x_i a la participación —expresada en tanto por uno— en la renta y en la población total de cada grupo; a las correspondientes frecuencias acumuladas las designaremos por y_i^a y por x_i^a. La curva de Lorenz se obtiene, como es sabido, representando los pares de valores (x_i^a, y_i^a) y uniendo mediante líneas rectas cada par consecutivo, y además (x_1^a, y_1^a) con el origen, según puede verse en la figura 1 en la que se han considerado cuatro intervalos.

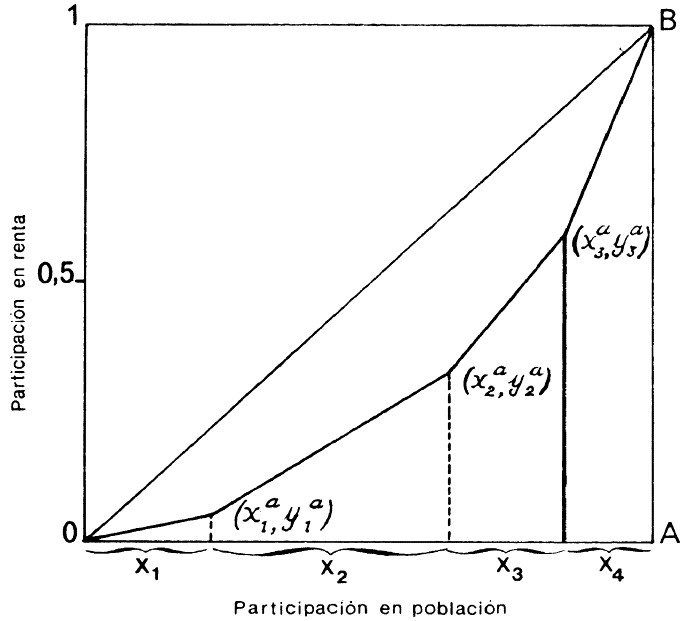

FIGURA 1. *Curva de Lorenz*

El índice de Gini se define con referencia a la figura anterior mediante la siguiente expresión:

$$IG = \frac{\text{Area rayada}}{\triangle OAB} = \frac{\text{Area } \triangle OAB - M}{\text{Area } \triangle OAB} \qquad [1]$$

donde M es el área existente debajo de la curva de Lorenz.

Si las participaciones en población y en renta están expresadas en tanto por uno, el área del triángulo $\triangle$OAB será igual a 0,5, y el índice de Gini tomará el siguiente valor:

$$IG = 1 - 2M \qquad [2]$$

Para evaluar M, se puede descomponer esta superficie en tantos trapecios rectángulos como intervalos considerados, según puede verse en la figura 1. [En realidad la figura correspondiente al primer intervalo es un triángulo rectángulo, pero a efectos del cálculo lo podemos considerar como un trapecio rectángulo que tiene una base nula. Cada trapecio tendrá como bases y^a_{i-1} e y^a_i; y como altura, x_i, variando i desde 1 hasta k, siendo k el número total de intervalos (lógicamente, $y_0 = 0$).]

De acuerdo con esta evaluación de M, (IG) se puede expresar de esta forma:

$$IG = 1 - \sum_{i=1}^{K} (y^a_{i-1} + y^a_i)\, x_i \qquad [3]$$

Ahora bien, en una distribución por decilas $K = 10$, y x_i tiene un valor constante e igual a 0,1. Por otra parte,

$$y^a_i = \sum_{j=1}^{i} y_j \qquad [4]$$

Sustituyendo este valor de y^a_i en [3]:

$$IG = 1 - \sum_{i=1}^{10} \left[\sum_{j=1}^{i-1} y_j + \sum_{j=1}^{i} y_j \right] \times 0{,}1 = 0{,}9 - 0{,}2 \times \sum_{j=1}^{9} (10 - j)\; y_j \qquad [5]$$

2.2 Porcentaje para máxima igualación

El porcentaje para máxima igualación es la medida más fácil de cálculo de las que hemos seleccionado. En la monografía que ha publicado el INE (1971) con los resultados de la encuesta de diferencias relativas de renta aparece calculada en todas las distribuciones por decilas. Esta medida se determina mediante la siguiente fórmula.

$$E = \sum_{y_i < 0{,}10} (10\, y_i - 10) \qquad [6]$$

donde y_i es la participación en renta de la decila i.

Siguiendo a la definición que se da en el documento elaborado por la Oficina Estadística Central Húngara (1973, p. 8), E indica el «porcentaje de la renta total del conjunto considerado que debería transferirse desde los grupos de decilas cuya participación excede del 10 por 100 a aquellos con participaciones menores del 10 por 100 con objeto de alcanzar una completa igualdad».

2.3 La medida v de Frigyes

Frigyes (1965) propuso tres medidas para caracterizar la desigualdad de la distribución de la renta. Posteriormente, Éltetö y Frigyes (1968) (1) analizaron sus propiedades, especialmente para el caso de que la distribución de la renta fuera del tipo logarítmico normal.

Estas medidas se definen mediante las siguientes fórmulas:

$$u = \frac{m}{m_1} \quad ; \quad v = \frac{m_2}{m_1} \qquad w = \frac{m_2}{m} \tag{7}$$

donde

$$m = E(R) \tag{8}$$

$$m_1 = E(R/R < m) \tag{9}$$

$$m_2 = E(R/R > m) \tag{10}$$

donde R designa la renta de una unidad perceptora seleccionada al azar.

De acuerdo con las anteriores expresiones, v puede interpretarse como las veces en que la renta media de los situados por encima del promedio excede a la media de los situados por debajo del promedio.

Interpretaciones análogas pueden darse a las medidas u y w. Mientras se puede afirmar que v es una medida de desigualdad del conjunto de rentas, u y v pueden considerarse como indicadores de la desigualdad de la renta en los tramos inferior y superior a la media, respectivamente.

Según Éltetö y Frigyes, estas medidas de desigualdad cumplen los siguientes requisitos:

a) Tienen una interpretación económica plausible.

b) Son fáciles de calcular a partir de datos agrupados.

c) Además de medir el grado de desigualdad de la renta, son también susceptibles de descomposición en factores, pudiéndose determinar la contribución de cada factor a la desigualdad de renta.

d) Estas medidas tienen una interpretación geométrica simple que se relaciona con la curva de Lorenz.

e) Para la mayor parte de las funciones de distribución que se estudia en la teoría de la distribución de la renta, los indicadores propuestos pueden expresarse en forma simple en función de los parámetros de la distribución.

(1) Estos autores indican que en una investigación independiente, Rabkina (1967) aplicó también un indicador de desigualdad análogo a la v.

No vamos a entrar aquí a examinar cada uno de estos puntos. Unicamente vamos a comentar el punto *c)* y analizar los problemas que se plantean al calcular estos indicadores a partir de una distribución por decilas.

En cuanto al punto *c)* señalaremos que las posibilidades de descomposición de estos indicadores son mucho más limitadas que en el clásico análisis de la varianza, ya que la factorización a que aluden los autores solamente puede llevarse a cabo con variables cuantitativas.

Cuando los datos están agrupados por intervalos, la media no coincidirá, salvo accidente estadístico, con el final de un intervalo. De todas formas, mediante interpolación se pueden obtener estimaciones de los individuos con renta superior e inferior a la media para el intervalo en el que se encuentra esta última. Sin embargo, cuando el investigador únicamente dispone de la distribución por decilas el problema se complica al no conocer los límites de cada intervalo, con lo que la interpolación tendrá un carácter mucho más arbitrario. Por esta razón hemos preferido en este estudio operar con decilas completas, de forma que si con una decila recibe una participación superior al 10 por 100 consideremos que todos los individuos de esa decila perciben una renta superior a la media y análogamente razonaríamos para las decilas con participación inferior al 10 por 100.

De las tres medidas propuestas por los autores utilizaremos para estudios comparativos únicamente la medida v.

2.4 Varianza de los logaritmos de las rentas

En principio podría esperarse que tanto la varianza de los logaritmos de las rentas como la varianza de las rentas, son utilizables como medidas de concentración. Sin embargo, esta última no tiene ningún interés por ser una medida de carácter absoluto y, por tanto, no susceptible de aplicación en estudios comparativos. Al tomar logaritmos de las rentas, la varianza se convierte automáticamente en medida relativa, con la ventaja adicional de que se puede desagregar en diversos niveles. También el coeficiente de variación al cuadrado de las rentas sería una medida de carácter relativo, pero con la desventaja de que presenta problemas a la hora de desagregar [véase Theil (1967), p. 125].

Una vez hechas estas consideraciones, pasamos a examinar la varianza de los logaritmos de las rentas y su descomposición.

Sean:

r_{mi} = renta percibida por el individuo i perteneciente al subconjunto S_m, para $m = 1,2, \ldots, M$.

N_m = número de individuos que integran el subconjunto S_m.

$$N = \sum_{m=1}^{M} N_m.$$

Si designamos por G y por G_m a las medias geométricas de la renta en el subconjunto m y en el total, respectivamente, tendremos las siguientes expresiones:

$$\log G_m = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \log r_{mi} \qquad [11]$$

$$\log G = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_m} \log r_{mi} = \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \log G_m \qquad [12]$$

De forma equivalente se puede considerar a $\log G_m$ y a $\log G$ como las medias aritméticas de los logaritmos de las rentas en el subconjunto S_m y en el total respectivamente. La varianza de los logaritmos de la renta para el total y su descomposición vendrían dados de acuerdo con el análisis clásico de la varianza por la siguiente expresión:

$$V_T = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_m} [\log r_{mi} - \log G]^2 =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} N_m (\log G_m - \log G)^2 + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_m} [\log r_{mi} - \log G_m]^2 \qquad [13]$$

o alternativamente por

$$V_T = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N_m} \left[\log \frac{r_{mi}}{G}\right]^2 = \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \left[\log \frac{G_m}{G}\right]^2 + \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \left[\frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left[\log \frac{r_{mi}}{G_m}\right]^2\right] \qquad [14]$$

Para simplificar [14] vamos a utilizar la siguiente notación:

$$V_{ES} = \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \left[\log \frac{G_m}{G}\right]^2 \qquad [15]$$

$$V_{Im} = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left[\log \frac{r_{mi}}{G_m}\right]^2 \qquad [16]$$

donde V_{ES} es la varianza de los logaritmos de renta *entre-subconjuntos* y V_{Im} es la varianza de los logaritmos de renta del subconjunto *h (intrasubconjuntos)*.

Sustituyendo las anteriores expresiones en [14] tendremos finalmente:

$$V_T = V_{ES} + \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} V_{Im} \qquad [17]$$

El primer término del segundo miembro de [17] es la varianza de los logaritmos de la renta *entre-subconjuntos*, mientras que el segundo término es una media ponderada de las varianzas de los logaritmos de las rentas *intra-subconjuntos*.

Como hemos visto, la varianza de los logaritmos de la renta es una medida relativa con posibilidades de descomposición. Además es una medida adecuada en el caso de que las rentas tengan una distribución lognormal.

Como inconvenientes de esta medida señalaremos los dos siguientes:

1. No está relacionada con la media aritmética, sino con la media geométrica, lo que dificulta la interpretación de los resultados obtenidos.
2. En el caso de que existan rentas nulas —y este problema se presentará en nuestra aplicación—, no se pueden calcular.

En la aplicación a la distribución por decilas de la varianza de los logaritmos de la renta utilizaremos la siguiente notación:

y_{mi} = participación en renta de la decila i en el subconjunto S_m.
R_m = renta del subconjunto S_m.

Por otra parte, N_m, N y r_{mi} conservarán el significado que les dimos al comienzo del epígrafe.

En base a esta notación, se pueden establecer las siguientes equivalencias con las fórmulas que hemos establecido anteriormente:

$$\log G_m = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log y_{mi} + \log R_m \qquad [18]$$

$$V_{Im} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \left[\log y_{mi} - \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log y_{mi} \right]^2 \qquad [19]$$

$$V_{ES} = \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \left[\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log y_{mi} + \log R_m - \sum_{m=1}^{M} \frac{N_m}{N} \left[\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log y_{mi} + \log R_m \right] \right]^2 \qquad [20]$$

A partir de las anteriores expresiones, teniendo en cuenta [12] se calcula de forma inmediata V_T.

2.5 Medida de igualdad basada en la teoría de la información ponderando por participación en renta

Como una introducción a la teoría de la información se pueden consultar en lengua castellana los trabajos de Arnaiz (1960) y Vegas (1969). En lo que se refiere concretamente a su aplicación a la distribución de la renta debemos destacar la obra de Theil (1967), que es la que seguiremos en nuestra exposición, como ya hicimos en nuestro anterior trabajo. [Véase Uriel (1974).]

Antes de analizar las medidas de desigualdad de distribución de la renta basadas en la teoría de la información, examinaremos brevemente los conceptos generales de esta teoría.

2.5.1 Conceptos generales sobre la teoría de la información

a) *Información contenida en un mensaje*

Sea un suceso E cuya probabilidad de presentarse es p. Si recibimos más tarde un mensaje que nos dice que efectivamente ha ocurrido el suceso E, entonces la información contenida en el mensaje será tanto mayor cuanto menor sea la probabilidad p de que se presente dicho suceso.

Si deseamos medir la información contenida en un mensaje en términos de la probabilidad que tenemos previa a su llegada, es lógico elegir una función decreciente. La función que se acostumbra a utilizar para este fin es la siguiente:

$$h(p) = \log \frac{1}{p} \qquad [21]$$

El motivo fundamental de esta elección radica en el hecho de que en el caso de dos o más sucesos independientes esta función cumple la atractiva propiedad de aditividad. En efecto, siendo E_1 y E_2 los sucesos independientes con probabilidades p_1 y p_2, si un mensaje afirma que se han presentado conjuntamente ambos sucesos, entonces la información contenida en el mensaje vendrá dada de acuerdo con [21], por

$$h(p_1, p_2) = \log \frac{1}{p_1 p_2} = \log \frac{1}{p_1} + \log \frac{1}{p_2} = h(p_1) + h(p_2) \qquad [22]$$

Se toma como unidad de información la que corresponde a un mensaje cuya probabilidad es $p = \frac{1}{2}$ cuando se utilizan logaritmos de base 2. Se dice entonces que la unidad de información es un *bit* («binary digit»). En la teoría de la información también se suelen utilizar logaritmos neperianos, en cuyo caso la unidad de información es un *nit*. Como $\log_e 2 = 0{,}693 = 1/1{,}443$, la relación entre un *bit* y un *nit* es inmediata:

$$1 \text{ bit} = 0{,}693 \text{ nit} \qquad 1 \text{ nit} = 1{,}443 \text{ bit}$$

En la figura 2 se indica en *bits* y en *nits* cómo varía $h(p)$ al variar p.

A la función [21] se puede llegar también como resultado de establecer una axiomática. Para más detalles, véase Theil (1967, pp. 5 y 6) y Khinchin (1957, páginas 9-13).

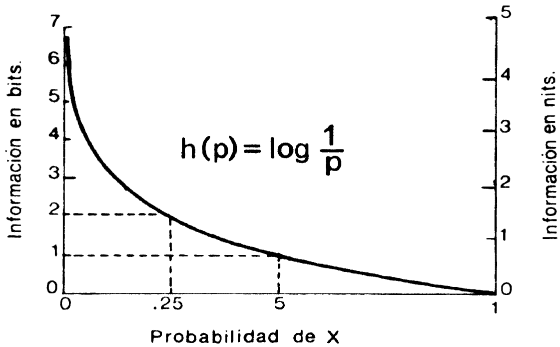

FIGURA 2

b) *Entropía de una distribución*

Antes de definir el concepto de entropía, y con objeto de darle una mayor generalidad, vamos a considerar un sistema completo de sucesos E_1, ..., E_1, tal que uno de ellos tiene que presentarse necesariamente. Sus probabilidades respectivas son p_1, p_2, ..., p_n; por tanto, se verificará que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad ; \quad p_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad [23]$$

El mensaje que se reciba nos dirá *a posteriori* cuál de estos sucesos se ha presentado. Sin embargo, a partir de las probabilidades existentes *a priori* se puede determinar la *información esperada* de dicho mensaje. Considerando a $h(p_i)$ como una variable aleatoria y a p_i como su probabilidad correspondiente, la determinación de la *información esperada* equivale a calcular la esperanza matemática de esta distribución, es decir:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, h(p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{}{p_i} = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \qquad [24]$$

Precisamente a $H(p)$ se la denomina *entropía* de una distribución. La expresión [24] nunca puede ser negativa, ya que es una media ponderada de valores $h(p_i)$ no negativos con pesos (p_i) también no negativos. Unicamente surge una indeterminación cuando un $p_i = 0$; entonces el producto $p_i \log \frac{1}{p_i}$ es de la forma $Ox(-\infty)$, pero tomando límites se ve inmediatamente que esta expresión tiende hacia cero.

Veamos ahora el intervalo de variación de $H(p)$. El mínimo valor de $H(p)$ es cero, que se presenta cuando un $p_i = 1$ y los restantes $p_j = 0$ para $j \neq i$. Es evidente que si tenemos una certeza absoluta de que se va a presentar el suceso E, la información esperada de un mensaje será nula.

La determinación del valor máximo de $H(p)$ implica maximizar esta función sujeta a la restricción de que $\sum p_i = 1$. Utilizando multiplicadores de Lagrange, la expresión a maximizar es la siguiente:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 \right] \qquad [25]$$

Derivando parcialmente S con respecto a cada p_i e igualando a 0, obtendremos —en el caso de que los logaritmos de [25] sean neperianos— las siguientes expresiones:

$$-1 - \log p_i - \lambda = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad [26]$$

A partir de [26] observamos que, cualquiera que sea i, resulta que $\log p_i = -1 - \lambda$; por tanto, todos los p_i serán iguales entre sí, lo que necesariamente lleva a que

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad [27]$$

En resumen, la máxima entropía se logra cuando todos los sucesos son igualmente verosímiles. Cuando esto ocurre antes de recibir el mensaje existe la máxima *incertidumbre*, por lo que el mensaje que recibamos contendrá la máxima *información* o máxima *entropía*.

c) *Información esperada de un mensaje indirecto*

En los dos apartados anteriores hemos considerado que el mensaje que recibíamos nos indicaba qué suceso se había presentado *efectivamente*. Ahora vamos a tratar el caso en que el mensaje nos informa únicamente que la probabilidad *a priori* de que se produjera el suceso E_i (a la que hemos designado por p_i) se transforma en otra probabilidad *a posteriori*, a la que designaremos por q_i. Esta información nos la suministra el mensaje para el sistema completo de sucesos. Para estas probabilidades *a posteriori* $(q_1, \ldots, q_n)$ se verificará también que

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \quad ; \quad q_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad [28]$$

Supongamos ahora por un momento que el mensaje nos indica solamente la probabilidad *a posteriori*, q_i, del suceso E_i. Dada la probabilidad *a priori*, p_i, la información contenida en el mensaje que nos dijera que se había producido E_i sería $h(p_i)$; en cambio, si dada la probabilidad *a posteriori*, q_i, nos llega otro mensaje afirmándonos que se ha producido efectivamente E_i, entonces su contenido de información sería $h(q_i)$. Así, pues, el cambio que se opera al pasar de $h(p_i)$ a $h(q_i)$ es el resultado del mensaje que transforma la probabilidad *a priori*, p_i, en la probabilidad *a posteriori*, q_i; la información neta contenida de dicho mensaje será la diferencia $h(p_i) - h(q_i) = \log q_i/p_i$.

Puesto que un mensaje indirecto afirma que la probabilidad de E_i es q_i y la información añadida es $\log q_i/p_i$, la información esperada de este mensaje indirecto será

$$I(q:p) = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{q_i}{p_i} \qquad [29]$$

2.5.2 La medición de la distribución de la renta a partir de la teoría de la información

Si consideramos un colectivo de N individuos, cada uno de ellos percibirá una fracción no negativa de la renta total del colectivo. Designando por y_i la fracción de renta total que percibe el individuo i-ésimo, se verificará que

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \quad ; \quad y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, N \qquad [30]$$

Si calculamos la entropía para la anterior distribución tendremos que

$$H(y) = \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \log \frac{1}{y_i} \qquad [31]$$

Cuando para todo y_i se verifica que $y_i = \frac{1}{N}$ estaremos ante un caso de concentración mínima o completa igualdad de renta. Dicho caso coincide precisamente con la máxima entropía, es decir, para la cual $H(y)$ toma el valor $\log N$.

Por el contrario, cuando la fracción renta de un individuo —por ejemplo, el y_j— es igual a 1, la concentración o desigualdad de renta será máxima. Se ve claramente que en dicho caso $H(y)$ es igual a cero.

En vista de lo anterior, la entropía puede contemplarse como un estadístico que nos mide la igualdad en la distribución de la renta.

Si el valor de la máxima entropía ($\log N$), para el que se da una igualdad completa entre las diferentes rentas, le restamos $H(y)$, obtendremos una medida de desigualdad de la renta. Analíticamente,

$$\log N - H(y) = \sum_{i=1}^{N} y_i \log N y_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \log \frac{y_i}{1/N} \qquad [32]$$

En la expresión anterior, $1/N$ es la renta que correspondería a cada individuo en el caso de completa igualdad. Si hacemos $1/N = x_i$, se puede interpretar a x_i como una probabilidad *a priori* y a y_i como una probabilidad *a posteriori*. De acuerdo con esta interpretación [32] sería la información esperada de un mensaje indirecto; es decir,

$$I(y : x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \log \frac{y_i}{x_i} \qquad [33]$$

Por motivos que se verán al tratar el problema de la agregación, es preferible utilizar [33] en lugar de [31] como instrumento para estudiar la desigualdad de la distribución de la renta.

Puede observarse fácilmente que $I(y : x)$ varía entre cero (completa igualdad) y log N (máxima desigualdad). En efecto, cuando $y_i = x_i$, para todo i, resulta que $I(y : x) = 0$; por otra parte, si y_i, por ejemplo, es igual a 1 e y_j, para $j \neq i$, es igual a cero, entonces $I(y : x) = \log \frac{1}{1/N} = \log N$ (2). Comparando el estadístico $I(y : x)$ con el índice de Gini observamos que el límite inferior coincide, pero no el límite superior. En el índice de Gini, el límite superior es siempre 1, mientras que en el estadístico $I(y : x)$ este límite superior es variable, aumentando a medida que se va incrementando el tamaño de la población. Cabe preguntarse: ¿Es esto un inconveniente de nuestro instrumento de medida? Veamos qué respuesta puede darse a este interrogante.

En una sociedad con dos individuos en que $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$, el índice de Gini tomará el valor 1; de igual forma, en una sociedad con 1.000.000 de individuos en que $y_1 = 1$ e $y_i = 0$ para $i \neq 1$, el índice de Gini también tomará el valor 1. Los valores de $I(y : x)$ serían, respectivamente, log 2 y log 1.000.000. Ahora bien, parece en principio razonable pensar que la segunda sociedad considerada es mucho más injusta que la primera. Nuestra segunda sociedad sería comparable a la primera si la mitad de sus individuos percibe una fracción de renta de $2/N$ cada uno, mientras que la otra mitad no percibe nada. En ese caso,

$$I(y : x) = \sum_{i=1}^{N/2} 2/N \log \frac{2/N}{1/N} = \log 2 \qquad [34]$$

que es precisamente el resultado que habíamos obtenido con la injusta siciedad de dos individuos.

Dejando aparte este punto, dos propiedades que son deseables que cumpla cualquier indicador que trate de medir la desigualdad en la distribución de la renta son las siguientes:

1.ª El indicador no debe alterarse cuando todas las rentas varían proporcionalmente.

2.ª Si en principio el individuo i percibe una fracción de renta superior al individuo j (es decir, $y_i > y_j$), y posteriormente el individuo j va incrementando su renta a expensas exclusivamente del individuo i (es decir, manteniéndose constante $y_i + y_j$), la medida de desigualdad de la renta debe ir decreciendo hasta el punto en que $y_i = y_j$, suponiendo, claro está, que las demás rentas permanecen inalteradas en todo este proceso.

(2) Para llegar a este resultado es preciso tomar límites, ya que se presentan indeterminaciones del tipo $0x\,(-\infty)$.

En lo que respecta a la primera propiedad, se ve inmediatamente que el estadístico [33] la cumple, ya que las rentas están expresadas como fracción de la renta total. La segunda propiedad también la cumple $I(y:x)$ según vamos a ver al tratar el problema de la agregación, del que pasamos a ocuparnos a continuación.

Supongamos, como en el apartado 2.4, que en una población de tamaño N se pueden considerar M subconjuntos: $S_1, \ldots, S_M$, de forma que cada individuo pertenezca a uno, y sólo a uno, de estos subconjuntos.

En primer lugar vamos a examinar los problemas de agregación de $H(y)$ para después pasar a $I(y:x)$. Una formulación equivalente de [31] sería la siguiente:

$$H(y) = \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{i \epsilon S} y_i \log \frac{1}{y_i} \right] \qquad [35]$$

Si denominamos

$$Y_m = \sum_{i \epsilon S_m} y_i \qquad m = 1, \ldots, M \qquad [36]$$

$$H_m(y) = \sum_{i \epsilon S_m} \frac{y_i}{Y_m} \log \frac{1}{y_i / Y_m} \qquad [37]$$

$$H(y) = \sum_{m=1}^{M} \left[Y_m \sum_{i \epsilon S_m} \frac{y_i}{Y_m} \log \frac{1/Y_m}{y_i/Y_m} \right] = \sum_{m=1}^{M} \left[Y_m \sum_{i \epsilon S_m} \frac{y_i}{Y_m} \left(\log \frac{1}{Y_m} + \log \frac{1}{y_i/Y_m} \right) \right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \left[Y_m \log \frac{1}{Y_m} + Y_m H_m(y) \right] = \sum_{m=1}^{M} Y_m \log \frac{1}{Y_m} + \sum_{m=1}^{M} Y_m H_m(y) \qquad [38]$$

El primer término de la última igualdad de [38] es la *entropía entre-subconjuntos*, mientras que el segundo término es una media ponderada de las entropías *intra-subconjuntos*.

Si estamos comparando varios subconjuntos, sería lógico esperar que la entropía entre-subconjuntos alcance su máximo valor cuando la renta per cápita de todos los subconjuntos sea igual. Sin embargo, el primer término de la última igualdad de [38] alcanza un máximo valor cuando, para todo, $Y_m = 1/M$ (es decir, cuando todos los subconjuntos tienen la misma renta total), en lugar de hacerlo cuando la renta per cápita es igual en todos los subconjuntos. Este hecho invalida a nuestro instrumento $H(y)$ para realizar comparaciones entre subconjuntos de individuos.

Veamos qué sucede si aplicamos $I(y:x)$ en vez de $H(y)$. De acuerdo con la última igualdad de [39], y teniendo en cuenta [32] y [33], la medida de desigualdad de la renta $I(y:x)$ se puede expresar de esta forma:

$$I(y:x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \log \frac{y_i}{x_i} =$$

$$= \log N - \sum_{m=1}^{M} Y_m \log \frac{1}{Y_m} - \sum_{m=1}^{M} Y_m H_m(\dot{y}) =$$

$$= \log N - \sum_{m=1}^{M} Y_m \log N_m - \sum_{m=1}^{M} Y_m \log \frac{1}{Y_m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} Y_m [\log N_m - H_m(y)] =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} Y_m \log \frac{Y_m}{N_m/N} + \sum_{m=1}^{M} Y_m \left[\sum_{i \in S_m} \frac{y_i}{Y_m} \log \frac{y_i/Y_m}{1/N_m} \right] \qquad [39]$$

El primer término de la última igualdad de [39] es la medida de desigualdad de renta entre-subconjuntos, mientras que el segundo es una media ponderada de la desigualdad de renta intra-subconjuntos. Por otra parte, puede comprobarse que dicho primer término es cero cuando las rentas *per capita* de los M subconjuntos son iguales. En efecto:

$$Y_m = \frac{\text{renta de } S_m}{\text{renta total}} = \frac{N_m \times \text{renta } per\ capita \text{ de } S_m}{N \times \text{renta } per\ capita \text{ del conjunto total}}$$

En caso de que todas las rentas *per capita* sean iguales, resultará que

$$Y_m = \frac{N_m}{N} \qquad [40]$$

Si $Y_m = N_m/N$, es evidente que $\log Y_m/(N_m/N) = 0$ y, por tanto, también será igual a 0 el primer término de la última igualdad de [39].

Si denominamos

$X_m = \dfrac{N_m}{N}$: participación de S_m en la población total, para $m = 1, \ldots, M$;

$z_i = \dfrac{y_i}{Y_m}$: participación del individuo i en la renta de S_m, para $i \in S_m$;

$v_i = \dfrac{1}{N_m}$: participación del individuo i en la población de S_m, para $i \in S_m$;

$I_{ES}(Y : X)$: medida de desigualdad entre subconjuntos;

$I_{Im}(z : v)$: medida de desigualdad dentro del subconjunto S_m,

entonces [39] se puede expresar por cualquiera de estas dos formas alternativas:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \log \frac{y_i}{x_i} = \sum_{m=1}^{M} Y_m \log \frac{Y_m}{X_m} + \sum_{m=1}^{M} Y_m \left[\sum_{i \in S_m} z_i \log \frac{z_i}{v_i} \right] \qquad [41]$$

o

$$I(y:x) = I_{ES}(Y:X) + \sum_{m=1}^{M} Y_m I_{Im}(z:v) \qquad [42]$$

A partir de los desarrollos anteriores vamos a examinar ahora si $I(y:x)$ cumple la segunda propiedad enunciada anteriormente.

Supongamos que el subconjunto S_1 está integrado por los individuos i y j. Su participación en renta dentro del subconjunto será, respectivamente, z_i y z_j, con $z_i + z_j = 1$. Por otra parte, su participación en la población dentro del subconjunto será lógicamente $v_i = \frac{1}{2}$ y $v_j = \frac{1}{2}$. En consecuencia, la desigualdad de rentas dentro del subconjunto S_1 adoptará la siguiente expresión:

$$I_{I1}(z:v) = z_i \log \frac{z_i}{v_i} + z_j \log \frac{z_j}{v_j} = z_i \log \frac{z_i}{1/2} + z_j \log \frac{z_j}{1/2} \qquad [43]$$

Consideremos la situación inicial en que $z_i > 0$, $z_j > 0$ y $z_i > z_j$. Si a partir de esta situación inicial, z_j va creciendo hasta llegar a $z_j = z_i$, el estadístico $I_{I1}(z:v)$ irá disminuyendo de valor, llegando a cero precisamente cuando la participación de los dos individuos es igual, es decir, cuando no existe desigualdad de renta.

Por el contrario, si a partir de la situación inicial se incrementa el valor de z_i, el estadístico $I_{I1}(z:v)$ crecerá también. La cota máxima se alcanzará cuando $z_i = 1$ (y, por tanto, $z_j = 0$) en que $I_{I1}(z:v) = \log 2$.

En resumen, vemos que el estadístico $I_{I1}(z:v)$ aumenta de valor cuando se incrementa la desigualdad de renta existente dentro del subconjunto S_1, mientras que disminuye en caso contrario.

Volviendo a [41], ó [42], se observa que una variación de $I_{Im}(z:v)$ implicará una variación en el mismo sentido de $I(y:v)$ ponderada por el peso Y_m, en el supuesto de que Y_m (y también las rentas de los individuos pertenecientes a los restantes subconjuntos) se mantenga inalterada. Analíticamente,

$$\Delta I(y:x) = Y_m \Delta I_m(z:v) \qquad [44]$$

ya que los cambios internos en $I_{Im}(z:v)$ no afectan al resto de la expresión [42], siempre y cuando Y_m se mantenga inalterada, como hemos supuesto. De esta forma queda demostrada la segunda propiedad considerada.

Al comienzo de este epígrafe hemos indicado que en el análisis comparativo íbamos a utilizar dos medidas basadas en la teoría de la información. La primera de ellas (IYX) viene dada por la expresión [42]. En su aplicación a los datos de la encuesta de «Diferencias relativas de renta», el significado concreto dado a z_i v_i es el siguiente:

z_i = participación de la decila i en la renta de S_m, para $i \in S_m$.

$v_i = 0{,}10$.

La segunda medida basada en la teoría de la información (IXY) viene dada por

$$I(x:y) = \sum_{m=1}^{M} X_m \log \frac{X_m}{Y_m} + \sum_{m=1}^{M} X_m \left[\sum_{i \epsilon S_m} v_i \log \frac{v_i}{z_i} \right] =$$

$$= I_{ES}(X:Y) + \sum_{m=1}^{M} X_m I_{Im}(v:z) \qquad [45]$$

En la expresión [45] se invierte, con relación a la expresión [42], el papel jugado por x e y, interpretándose $I(x:y)$ como la información esperada de un mensaje indirecto que transforma las probabilidades *a priori*, y_i (participaciones en renta), en las probabilidades *a posteriori*, x_i (participaciones en población). En [42] las ponderaciones son las participaciones en renta, mientras que en [45] las ponderaciones son las participaciones en población. Este hecho puede afectar de forma considerable al resultado final. Pensemos, por ejemplo, en la aplicación a la distribución de la renta *per capita* en todo el mundo: en el caso de $I(y:x)$ el resultado final estaría en su mayor parte determinado por la renta de los países de la OCDE; en cambio, al aplicar $I(x:y)$ la influencia de la población de los países del Tercer Mundo sería decisiva en los resultados.

3. ANALISIS DE RESULTADOS

En primer lugar, vamos a efectuar un estudio comparativo en base a la aplicación de las seis medidas de desigualdad seleccionadas a los subconjuntos o grupos de una serie de tablas de decilas obtenidas para distintas características. Se analizará el grado de asociación entre las distintas medidas de desigualdad según la ordenación que hacen de los grupos de cada conjunto.

Las tablas de decilas de la encuesta «Diferencias relativas de renta» a las que se han aplicado las seis medidas de desigualdad (3) son las siguientes:

1. Renta distribuida por hogar según categoría socioeconómica del cabeza de familia.
2. Renta disponible por hogar según categoría socioeconómica del cabeza de familia.
3. Renta disponible por persona según categoría socioeconómica del cabeza de familia.
4. Renta distribuida por hogar según edad del cabeza de familia.
5. Renta distribuida por hogar según el número de perceptores activos del hogar.
6. Renta disponible por persona según tamaño del hogar.
7. Renta disponible por persona según tamaño del municipio.
8. Renta por perceptor activo según categoría socioeconómica del perceptor.

(3) En algunas tablas existen decilas con renta nula, lo que ha impedido aplicar en dicho caso la varianza del logaritmo de la renta.

9. Renta primaria por perceptor activo según el nivel de instrucción del perceptor.
10 Renta primaria por perceptor activo según la edad del perceptor.

Los resultados para las características anteriores aparecen en los cuadros 1 a 10. En la parte *a)* de cada cuadro se refleja la participación en porcentaje en la población y en la renta total de cada uno de los subconjuntos considerados, así como las medidas de desigualdad de los mismos. En la parte *b)* se indica para cada una de las medidas consideradas el número de orden —en una ordenación de menor a mayor— que corresponde a cada grupo o subconjunto en que se ha dividido el colectivo total. Finalmente, en la parte *c)* se refleja el grado de asociación entre medidas de desigualdad. Este grado de asociación se ha obtenido aplicando a los datos del apartado *b)* la medida γ de Goodman-Kruskal (4) que viene dada por la siguiente expresión:

$$\gamma = \frac{P - Q}{P + Q} \qquad [46]$$

Veamos qué significado tienen los símbolos P y Q en la expresión anterior. En la comparación de dos medidas determinadas, se toma cada par de subconjuntos y se observa su respectivo número de orden en las dos medidas de desigualdad. Si existe una relación directa, es decir, si existe la misma ordenación relativa de los dos subconjuntos, en ambas medidas, entonces el par es positivo; en caso contrario, el par es negativo. P es precisamente el número de pares positivos, mientras que Q es el número de pares negativos. Como $P + Q$ es el número total de pares, el coeficiente γ es la proporción de pares positivos menos la proporción de pares negativos. El coeficiente varía entre —1 y 1.

En los grupos del cuadro 1 (Renta *distribuida* por categoría socioeconómica), el grado de asociación entre las distintas medidas es muy elevado, excepción hecha de $I(v:z)$, para la que la categoría inactivos aparece como la de menor desigualdad, a diferencia de las otras medidas en que ocurre todo lo contrario. Conviene señalar que en dicha categoría las cinco primeras decilas aparecen con renta nula. Este fenómeno no se presenta en los restantes cuadros clasificados por categoría socioeconómica: 2, 3 y 8. En todos ellos, el grado de asociación de las distintas medidas es 1 ó próximo a 1. En ninguno de estos cuadros aparecen rentas nulas, ya que se refieren a renta disponible (los dos primeros) y a renta por perceptor activo.

En el cuadro 4, donde se considera la renta distribuida según la edad del cabeza de familia, aparecen tres medidas $[IG, E$ y $I(z:v)]$ con idéntica ordenación, siendo su grado de asociación con las dos restantes nula (v) o muy baja $[I(v:z)]$. En cambio, en el cuadro 10, referido a la renta primaria por perceptor activo según edad del perceptor, el grado de asociación entre las

(4) Véase a este respecto WEISS (1968, pp. 198 y ss.).

CUADRO 1

RENTA DISTRIBUIDA POR HOGAR SEGUN CATEGORIA SOCIOECONOMICA DEL CABEZA DE FAMILIA

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	ν	V_{Im}	I_{Im} $(z : \nu)$	I_{Im} $(\nu : z)$
a) Directores, gerentes y cuadros superiores.	3,89	10,18	0,3312	23,9500	2,6653	—	0,1774	0,1951
b) Técnicos y empleados intermedios, capataces	4,57	9,82	0,3025	22,2600	2,4765	—	0,1456	0,1516
c) Otros empleados oficina y otros trabajadores no manuales	11,45	15,83	0,2757	19,9000	2,2440	—	0,1210	0,1297
d) Trabajadores manuales no agrarios	41,92	45,50	0,2791	20,0800	2,2603	—	0,1251	0,1301
e) Trabajadores manuales agrarios	11,98	8,23	0,3047	21,7000	2,4202	—	0,1524	0,1601
f) Fuerzas Armadas	1,77	2,94	0,2609	19,6900	2,2245	—	0,1068	0,1071
g) Inactivos	24,42	7,50	0,7573	63,8400	35,7194	—	1,1661	0,0593

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	ν	V_{Im}	I_{Im} $(z : \nu)$	I_{Im} $(\nu : z)$
a	6	6	6	—	6	7
b	4	5	5	—	4	5
c	2	2	2	—	2	3
d	3	3	3	—	3	4
e	5	4	4	—	5	6
f	1	1	1	—	1	2
g	7	7	7	—	7	1

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	ν	V_{Im}	I_{Im} $(z : \nu)$	I_{Im} $(\nu : z)$
IG	1,000	0,905	0,905	1,000	1,000	0,429
E		1,000	1,000	—	0,905	0,333
ν			1,000	—	0,905	0,333
V_{Im}				1,000	—	—
I_{Im} $(z : \nu)$					1,000	0,429
I_{Im} $(\nu : z)$						1,000

CUADRO 2

RENTA DISPONIBLE POR HOGAR SEGUN CATEGORIA SOCIOECONOMICA DEL CABEZA DE FAMILIA

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
a) Directores, gerentes y cuadros superiores.	3,89	8,81	0,3259	23,5500	2,6188	0,3991	0,1717	0,1870
b) Técnicos y empleados intermedios, capataces	4,57	8,59	0,2937	21,6500	2,4151	0,2870	0,1366	0,1421
c) Otros empleados oficina y otros trabajadores no manuales	11,45	14,40	0,2692	19,3800	2,1944	0,2593	0,1163	0,1237
d) Trabajadores manuales no agrarios	41,92	42,05	0,2666	19,1300	2,1728	0,2403	0,1143	0,1184
e) Trabajadores manuales agrarios	11,98	7,90	0,2912	20,6600	2,3153	0,3023	0,1395	0,1462
f) Fuerzas Armadas	1,77	2,72	0,2523	18,9700	2,1585	0,1880	0,1015	0,0993
g) Inactivos	24,42	15,53	0,4878	36,4400	4,6249	1,0109	0,3974	0,4618

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
a	6	6	6	6	6	6
b	5	5	5	4	4	4
c	3	3	3	3	3	3
d	2	2	2	2	2	2
e	4	4	4	5	5	5
f	1	1	1	1	1	1
g	7	7	7	7	7	7

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
IG	1,000	1,000	1,000	0,905	0,905	0,905
E		1,000	1,000	0,905	0,905	0,905
v			1,000	0,905	0,905	0,905
V_{Im}				1,000	1,000	1,000
$I_{Im}(z:v)$					1,000	1,000
$I_{Im}(v:z)$						1,000

CUADRO 3

RENTA DISPONIBLE POR PERSONA SEGUN CATEGORIA SOCIOECONOMICA DEL CABEZA DE FAMILIA

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a) Directores, gerentes y cuadros superiores.	4,08	8,81	0,3285	23,5400	2,6924	0,3529	0,1800	0,1805
b) Técnicos y empleados intermedios, capataces	4,91	8,59	0,3299	23,7900	2,6447	0,3716	0,1787	0,1841
c) Otros empleados oficina y otros trabajadores no manuales	11,81	14,40	0,2973	21,4400	2,3938	0,2915	0,1414	0,1456
d) Trabajadores manuales no agrarios	45,51	42,05	0,2888	20,9400	2,3432	0,2775	0,1337	0,1379
e) Trabajadores manuales agrarios	13,52	7,90	0,3159	22,8400	2,5400	0,3305	0,1630	0,1661
f) Fuerzas Armadas	2,14	2,72	0,2433	17,3700	2,0210	0,1787	0,1001	0,0958
g) Inactivos	18,03	15,53	0,4200	30,3900	3,5719	0,6895	0,2936	0,3231

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a	5	5	6	5	6	5
b	6	6	5	6	5	6
c	3	3	3	3	3	3
d	2	2	2	2	2	2
e	4	4	4	4	4	4
f	1	1	1	1	1	1
g	7	7	7	7	7	7

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
IG	1,000	1,000	1,000	1,000	0,905	1,000
E		1,000	0,905	1,000	0,905	1,000
ν			1,000	0,905	1,000	0,905
V_{Im}				1,000	0,905	1,000
$I_{Im}(z:\nu)$					1,000	0,905
$I_{Im}(\nu:z)$						1,000

CUADRO 4

RENTA DISTRIBUIDA POR HOGAR SEGUN EDAD DEL CABEZA DE FAMILIA

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a) Hasta veinticuatro años	1,19	1,18	0,3200	22,8400	2,6868	—	0,1693	0,1989
b) Veinticinco a cuarenta y cuatro años	40,53	46,47	0,3216	23,0100	2,5586	—	0,1720	0,1761
c) Cuarenta y cinco a sesenta y cuatro años	39,45	46,25	0,4162	30,1300	3,5288	—	0,2962	0,4688
d) Sesenta y cinco y más años	18,83	6,10	0,7566	63,7100	34,9292	—	1,1588	0,0192

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a	1	1	3	—	1	3
b	2	2	2	—	2	2
c	3	3	1	—	3	4
d	4	4	4	—	4	1

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
IG	1,000	1,000	0	—	1,000	0,200
E		1,000	0	—	1,000	0,333
v			1,000	—	0	0,666
V_{Im}				1,000	—	—
$I_{Im}\ (z:v)$					1,000	0,333
$I_{Im}\ (v:z)$						1,000

CUADRO 5

RENTA DISTRIBUIDA POR HOGAR SEGUN EL NUMERO DE PERCEPTORES ACTIVOS DEL HOGAR

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
a) Ningún activo	17,47	1,50	0,8753	79,4900	198,9800	—	1,9172	0,0691
b) Un activo	60,60	62,62	0,3408	24,3100	2,7074	—	0,1946	0,1997
c) Dos activos	15,30	22,38	0,2917	20,8500	2,3338	—	0,1397	0,1428
d) Tres y más activos	6,63	13,50	0,2299	16,2000	1,9269	—	0,0847	0,0887

b) **Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad**

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
a	4	4	4	—	4	1
b	3	3	3	—	3	4
c	2	2	2	—	2	3
d	1	1	1	—	1	2

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) **Asociación entre las medidas de desigualdad**

Medidas de desigualdad	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}(z:v)$	$I_{Im}(v:z)$
IG	1,000	1,000	1,000	—	1,000	0
E		1,000	1,000	—	1,000	0
v			1,000	—	1,000	0
V_{Im}				1,000	—	0
$I_{Im}(z:v)$					1,000	—
$I_{Im}(v:z)$						1,000

CUADRO 6

RENTA DISPONIBLE POR PERSONA SEGUN TAMAÑO DEL HOGAR

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a) Un miembro	1,72	2,74	0,5221	39,4900	5,3249	1,0713	0,4669	0,5191
b) Dos miembros	10,90	13,94	0,4167	30,4000	3,5724	0,7348	0,2873	0,3296
c) Tres miembros	15,57	20,18	0,3272	23,4200	2,6034	0,3849	0,1761	0,1856
d) Cuatro miembros	23,10	24,73	0,3055	22,0600	2,4562	0,3170	0,1518	0,1567
e) Cinco y más miembros	48,70	38,41	0,3299	23,9400	2,6627	0,3720	0,1768	0,1835

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a	5	5	5	5	5	5
b	4	4	4	4	4	4
c	2	2	2	3	2	3
d	1	1	1	1	1	1
e	3	3	3	2	3	2

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
IG	1,000	1,000	1,000	0,800	1,000	0,800
E		1,000	1,000	0,800	1,000	0,800
v			1,000	0,800	1,000	0,800
V_{Im}				1,000	0,800	1,000
$I_{Im}\ (z:v)$					1,000	0,800
$I_{Im}\ (v:z)$						1,000

RENTA DISPONIBLE POR PERSONA SEGUN TAMAÑO DEL MUNICIPIO

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a) Municipios de menos de 5.000 habitantes ...	17,06	12,58	0,3874	28,0900	3,2068	0,5457	0,2489	0,2643
b) Municipios de 5.000 a 19.999 habitantes	20,05	15,89	0,3379	24,6100	2,7424	0,3955	0,1863	0,1942
c) Municipios de 20.000 y más habitantes	62,89	71,53	0,3404	24,7000	2,7532	0,3890	0,1899	0,1948

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
a	3	3	3	3	3	3
b	2	1	1	2	1	1
c	1	2	2	1	2	2

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	v	V_{Im}	$I_{Im}\ (z:v)$	$I_{Im}\ (v:z)$
IG	1,000	0,333	0,333	1,000	0,333	0,333
E		1,000	1,000	0,333	1,000	0,333
v			1,000	0,333	1,000	1,000
V_{Im}				1,000	0,333	0,333
$I_{Im}\ (z:v)$					1,000	1,000
$I_{Im}\ (v:z)$						1,000

CUADRO 8

RENTA PRIMARIA POR PERCEPTOR ACTIVO SEGUN CATEGORIA SOCIOECONOMICA DEL PERCEPTOR

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a) Activos no asalariados	1,94	1,24	0,4293	31,4300	3,7211	0,7533	0,3072	0,3447
b) Directores, gerentes y cuadros superiores	4,46	10,72	0,3415	25,1900	2,8123	0,4304	0,1991	0,2038
c) Técnicos y empleados intermedios; capataces.	4,95	9,64	0,3004	21,7400	2,4237	0,3157	0,1436	0,1525
d) Otros empleados oficinas y otros trabajadores no manuales	17,64	19,66	0,3166	23,0500	2,5637	0,3721	0,1603	0,1748
e) Trabajadores manuales no agrarios	55,36	47,96	0,2663	18,8700	2,1501	0,3063	0,1151	0,1341
f) Trabajadores manuales agrarios	14,05	7,90	0,2975	20,8700	2,4371	0,3966	0,1449	0,1721
g) Fuerzas Armadas	1,60	2,88	0,2541	19,2400	2,1833	0,1947	0,1017	0,1014

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a	7	7	7	7	7	7
b	6	6	6	6	6	6
c	4	4	3	3	3	3
d	5	5	5	4	5	5
e	2	1	1	2	2	2
f	3	3	4	5	4	4
g	1	2	2	1	1	1

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
IG	1,000	0,905	0,809	0,809	0,905	0,905
E		1,000	0,905	0,714	0,800	0,800
ν			1,000	0,809	0,905	0,905
V_{Im}				1,000	0,905	0,905
$I_{Im}(z:\nu)$					1,000	1,000
$I_{Im}(\nu:z)$						1,000

CUADRO 9

RENTA PRIMARIA POR PERCEPTOR ACTIVO SEGUN NIVEL DE INSTRUCCION DEL PERCEPTOR

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a) Primer nivel de Instrucción	84,40	71,49	0,3017	19,3600	2,3055	0,3638	0,1146	0,1789
b) Segundo nivel de Instrucción	10,74	16,20	0,3285	23,7500	2,6416	0,4109	0,1734	0,1910
c) Tercer nivel de Instrucción	4,86	12,31	0,3200	23,8200	2,6496	0,3641	0,1637	0,1748

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a	1	1	1	2	1	2
b	3	2	2	3	3	3
c	2	3	3	1	2	1

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
IG	1,000	0,333	0,333	0,333	1,000	0,333
E		1,000	1,000	0,333	0,333	0,333
ν			1,000	0,333	0,333	0,333
V_{Im}				1,000	0,333	1,000
$I_{Im}(z:\nu)$					1,000	0,333
$I_{Im}(\nu:z)$						1,000

CUADRO 10

RENTA PRIMARIA POR PERCEPTOR ACTIVO SEGUN EDAD DEL PERCEPTOR

a) Medidas de desigualdad para cada grupo

GRUPOS	Participación en porcentaje en la población total	Participación en porcentaje en la renta total	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a) Hasta veinticuatro años	20,31	12,73	0,2993	21,0000	2,3498	0,3695	0,1459	0,1658
b) Veinticinco-cuarenta y cuatro años	45,43	51,82	0,3150	22,3500	2,4860	0,3582	0,1649	0,1727
c) Cuarenta y cinco-sesenta y cuatro años	32,57	34,18	0,3605	25,6200	2,8688	0,4837	0,2198	0,2321
d) Sesenta y cinco y más años	1,69	1,27	0,4210	30,5000	3,5933	0,7716	0,2931	0,3417

b) Número de orden * de cada grupo en las distintas medidas de desigualdad

GRUPOS	MEDIDAS DE DESIGUALDAD					
	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
a	1	1	1	2	1	1
b	2	2	2	1	2	2
c	3	3	3	3	3	3
d	4	4	4	4	4	4

* Ordenación de menor a mayor desigualdad.

c) Asociación entre las medidas de desigualdad

Medidas de desigualdad	IG	E	ν	V_{Im}	$I_{Im}(z:\nu)$	$I_{Im}(\nu:z)$
IG	1,000	1,000	1,000	0,666	1,000	1,000
E		1,000	1,000	0,666	1,000	1,000
ν			1,000	0,666	1,000	1,000
V_{Im}				1,000	1,000	1,000
$I_{Im}(z:\nu)$					1,000	1,000
$I_{Im}(\nu:z)$						1,000

cinco medidas anteriores es la unidad, presentando únicamente diferencias de ordenación la medida V_{Im}. Esta medida no se pudo calcular en el cuadro 4 por existir decilas con rentas nulas.

En el cuadro 5 (Renta distribuida por hogar según el número de perceptores activos) vuelve a presentarse el mismo fenómeno, pero más acentuado que en el cuadro 1. En esta ocasión el grado de asociación entre $I(\nu : z)$ y las demás medidas es cero.

En el cuadro 6, que se refiere a la renta disponible por persona según tamaño del hogar, el grado de asociación entre cada par de medidas es de 1, excepción hecha de V_{Im} y $I(\nu : z)$, que tienen idéntico comportamiento, pero cuyo grado de asociación con el resto es de 0,8.

En los dos cuadros restantes (7 y 9), clasificados por tamaño del municipio y nivel de instrucción, respectivamente, aparecen grados de asociación perfecta a la vez que grados de asociación muy bajos.

Resumiendo lo anterior, señalaremos que las medidas $I(\nu : z)$ y V_{Im} son las que presentan, especialmente la primera, un comportamiento más anómalo, mientras que las cuatro restantes mantienen en general un elevado grado de asociación.

En lo que antecede hemos comparado cómo quedaban ordenados los grupos pertenecientes a un conjunto al aplicar distintas medidas de desigualdad. Ahora vamos a examinar la desigualdad total para las diez agrupaciones consideradas, y su desagregación en desigualdad intra-subconjuntos y desigualdad entre-subconjuntos. Como ya se ha indicado, únicamente se puede calcular dicha desagregación con la medida varianza de los logaritmos de la renta y con las dos medidas basadas en la teoría de la información. En el cuadro 11 se han recogido los resultados obtenidos.

Conviene señalar que la desigualdad total para una medida determinada debería ser, en teoría, idéntica en los casos en que coincide el concepto a que se aplica. Por tanto, la desigualdad total debe coincidir en las agrupaciones 1, 4 y 5, ya que todas ellas se refieren a renta distribuida por hogar. Otro tanto cabría decir, por una parte, de las agrupaciones 3, 4 y 7, referidas a renta disponible por persona, y por otra, de las agrupaciones 8, 9 y 10, referidas a la renta primaria por perceptor activo. Las diferencias que puedan aparecer dentro de un mismo concepto se deben exclusivamente a los efectos de la agregación de los datos por decilas. De la observación de la columna (3) del cuadro 11 se deduce que para las medidas basadas en la teoría de la información las oscilaciones de la desigualdad total para un mismo concepto son, en general, pequeñas, a diferencia de lo que sucede con la varianza del logaritmo de la renta, medida para la cual las diferencias llegan a ser considerables.

Otra observación previa que conviene hacer. Cuando la agrupación se hace en función de la edad, número de miembros de la familia, o de cualquier otra característica que no suscite problemas de interpretación, la desagregación de la desigualdad en sus dos componentes (intra-subconjuntos y entre-subconjuntos)

CUADRO 11

DESIGUALDAD TOTAL Y SU DESCOMPOSICION PARA DISTINTAS AGRUPACIONES

AGRUPACIONES	Medidas de desigualdad	Desigualdad entre subconjuntos (1)	Desigualdad intra subconjuntos (2)	Desigualdad total (3)	$\frac{(1)}{(3)} \cdot 100$
1. Renta distribuida por hogar según categoría socioeconómica del cabeza de familia.	V	—	—	—	—
	$I\ (y:x)$	0,1572	0,2115	0,3687	42,63
	$I\ (x:y)$	0,1805	0,1195	0,3000	60,17
2. Renta disponible por hogar según categoría socioeconómica del cabeza de familia.	V	0,5659	0,4454	1,0113	55,95
	$I\ (y:x)$	0,0691	0,1671	0,2362	29,25
	$I\ (x:y)$	0,0647	0,2096	0,2743	23,58
3. Renta disponible por persona según categoría socioeconómica del cabeza de familia	V	0,5730	0,3662	0,9391	61,01
	$I\ (y:x)$	0,0522	0,1690	0,2212	23,59
	$I\ (x:y)$	0,0482	0,1791	0,2273	21,21
4. Renta distribuida por hogar según edad del cabeza de familia.	V	—	—	—	—
	$I\ (y:x)$	0,0682	0,2897	0,3579	19,05
	$I\ (x:y)$	0,0940	0,2623	0,3563	26,39
5. Renta distribuida por hogar según el número de perceptores activos del hogar.	V	—	—	—	—
	$I\ (y:x)$	0,1648	0,1934	0,3582	46,00
	$I\ (x:y)$	0,3034	0,1608	0,4642	65,36
6. Renta disponible por persona según tamaño del hogar.	V	0,2641	0,4129	0,6770	39,01
	$I\ (y:x)$	0,0249	0,1938	0,2187	11,38
	$I\ (x:y)$	0,0247	0,1993	0,2240	11,01
7. Renta disponible por persona según tamaño del municipio.	V	0,6387	0,4170	1,0557	60,50
	$I\ (y:x)$	0,0168	0,1968	0,2136	7,86
	$I\ (x:y)$	0,0176	0,2065	0,2241	7,86
8. Renta primaria por perceptor activo según categoría socioeconómica del perceptor.	V	0,8026	0,3435	1,1461	70,03
	$I\ (y:x)$	0,0768	0,1390	0,2158	35,57
	$I\ (x:y)$	0,0684	0,1540	0,2225	30,76
9. Renta primaria por perceptor activo según nivel de instrucción del perceptor.	V	0,3296	0,3689	0,6984	47,19
	$I\ (y:x)$	0,0624	0,1302	0,1926	32,39
	$I\ (x:y)$	0,0508	0,1800	0,2309	22,02
10. Renta primaria por perceptor activo según edad del perceptor.	V	0,4697	0,4083	0,8781	53,50
	$I\ (y:x)$	0,0216	0,1829	0,2045	10,55
	$I\ (x:y)$	0,0242	0,1935	0,2177	11,10

tendrá un significado claro. En cambio, no ocurre lo mismo con la categoría socioeconómica. Al hacer una clasificación de este tipo se pretende, en definitiva, estratificar la población en grupos homogéneos y, naturalmente, una de las condiciones para que exista tal homogeneidad dentro de cada categoría es que la renta sea muy semejante. Por tanto, cuando la desigualdad dentro de cada uno de estos grupos es elevada, será esto un indicador de que la estratificación por categorías socioeconómicas no es la adecuada.

Volviendo a los resultados del cuadro 11, señalaremos que es muy similar en bastantes casos el comportamiento de las medidas $I(y:x)$ e $I(x:y)$. Sin embargo, en las agrupaciones 1 y 5 estas dos medidas conducen a resultados opuestos: en la agrupación 1 la desigualdad entre-subconjuntos supera al 50 por 100 de la desigualdad total en el caso de $I(y:x)$, no llegando a esa cota cuando se considera $I(x:y)$; en la agrupación 4 sucede justamente lo contrario. Por otra parte, la medida V tiene un comportamiento radicalmente distinto a las dos medidas basadas en la teoría de la información; como ejemplo extremo de esta disparidad, señalaremos la agrupación 7, donde la razón (desigualdad entre-subconjuntos/desigualdad total) $\times$ 100 alcanza el valor de 60,50 para V, mientras que en las otras dos medidas no llega a 8.

Como conclusión final de este estudio, señalaremos que de las seis medidas seleccionadas, la más adecuada, a nuestro juicio, es $I(y:x)$, por las dos razones siguientes. En primer lugar, en la ordenación de los grupos de un conjunto se comporta de manera similar a las medidas IG, v y E. En segundo lugar, con la medida $I(y:x)$, a diferencia de las anteriores, se puede desagregar la desigualdad total. Ya hemos visto que las otras dos medidas que permiten tal desagregación presentan ciertas anomalías.

BIBLIOGRAFIA

ARNAIZ, G. (1960b): «Teoría de la información». *Estadística Española* núm. 9, pp. 5-29.

ÉLTETÖ, O., y FRIGYES, E. (1968): «New income inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning». *Econometrica*, vol. 36; pp. 383-396.

FRIGYES, E. (1965): «A Simulation experiment for estimating per capita income distribution». *Economics of Planning*, vol. 5, pp. 94-105.

INE (1974): *Diferencias relativas de renta*. Madrid.

KHINCHIN, A. I. (1957): *Mathematical Foundations of Information Theory*. Nort-Holland.

OFICINA ESTADÍSTICA CENTRAL HÚNGARA (1973): «A draft programme paper for the project of international comparison of relative income differences». Conferencia de Estadísticos Europeos. Ginebra.

RABKINA, N. E. (1967): *Algunas propiedades e indicadores de la distribución lognormal aplicados a salarios y rentas*. Moscú. N.I.I. Iruda (en ruso).

THEIL, H. (1967): *Economics and information Theory*. North-Holland.

URIEL, E. (1974): «La teoría de la información y la medición de la distribución de la renta: Aplicación a la distribución provincial de la renta en España». *Anales de Economía* núm. 23, 3.ª ép., pp. 1-59.

VEGAS, A. (1969): «Consideraciones sobre la teoría de la información». *De Economía* número 100, pp. 33-56.

WEISS, E. W. (1968): *Statistics in social research: An introduction*. John Wiley.